数理解析研究所講究録
134巻 1972年 121-135

抽象的CAUCHY問題の適切性について

早大 理工　岡沢 登

AをBanach空間X内の線形作用素とし，Aを係数にもつ微分方程式

(E)　　$(d/dt)u(t) = Au(t), \quad 0 < t < \infty,$

を考える．Aに対して

(A 1)　Aの定義域$D(A)$はXで稠密である．

(A 2)　Aは閉作用素である．

(A 3)　$D(A^2)$はAの芯である．即ち，Aの$D(A^2)$上への制限はclosableであり，その閉包はA自身に等しい．

を仮定すると都合がよい．但し，Aのresolvent集合$\rho(A)$が空でなければ，(A 1)と(A 2)から(A 3)が導かれる．

方程式(E)に対して抽象的CAUCHY問題(Abstract CAUCHY Problem)を次の様に設定する：

ACP．　$u_0 \in X$が与えられたとき，次の三条件を満足するX-値関数 ― ACPの解 ― を見出せ．

(ACP1)　$u(t)$ は $t>0$ で連続的微分可能である.

(ACP2)　$t>0$ では $u(t)\in D(A)$ かつ $u(t)$ は方程式(E)を満足する.

(ACP3)　$u(0)=\lim\limits_{t\to+0} u(t) = u_0$.

上に定義されたACPはHILLE-PHILLIPS[2]でACP$_2$, КРЕЙН[3]で緩められたCAUCHY問題と呼ばれているものとほぼ同じである.

さて

ACPの適切性.　次の二条件が成立するとき, Aに対するACPは適切であると言われる.

(適切1)　任意の $u_0\in D(A)$ に対してACPの解が一意的に ~~適切2~~ 存在する(解の一意存在).

(適切2)　$u_n(0)\in D(A)$ を初期値とする解を $u_n(t)$ とすると, $u_n(0)\to 0$ in X $(n\to\infty)$ であれば, 任意の $t\geqq 0$ で $u_n(t)\to 0$ in X $(n\to\infty)$ となる(初期値に対する解の連続的依存性).

この適切性の定義はКРЕЙН[3]における, 緩められたCAUCHY問題の $D(A)$ 上での適切性の定義と同じである.

本稿ではACP及びその適切性を上に定めた意味にとって, (E)に対するACPが適切であるような線形作用素Aの満足す

べき条件を調べ，またその条件から逆にAに対するACPの解を構成することについて考えてみたい。この問題の解決はKPEЙH[3]の意図したところと思われるが，この問題について[3]に述べられている結果には不十分なところがある．しかし，条件（適切2）で収束 $u_n(t) \to 0$ in X が任意の有限区間 $[0,T]$ 上で一様である場合には，上に述べた問題が (C_0) 級半群を特徴付ける HILLE - YOSIDA - FELLER - MIYADERA - PHILLIPS の定理によって完全に解決されることを示している．

1．KPEЙHの結果の要約

KPEЙH[3]に述べられている結果のうちで線形作用素Aのresolvent集合が空であっても成立するものを抜き出しておく．

$T(t)$ を各 $u_0 \in D(A)$ に，初期条件 $u(0)=u_0$ に応ずるACPの解の時刻 t における値 $u(t)$ を対応させる作用素：$u(t)=T(t)u_0$ とする．ACPが適切ならば，作用素 $T(t)$ は $D(A)$ 上で定義され，線形かつ有界である．従って連続性により，$T(t)$ は全空間X上で定義される有界線形作用素に一意的に拡張される（このために条件(A1)が欠かせない）．拡張された作用素を再び $T(t)$ で表わすことにする．

Aに対するACPが適切ならば，作用素の族 $\{T(t); t>0\}$

は半群の性質をもつ．

$u_0 \notin D(A)$ならば，$T(t)u_0$は一般化された解と呼ばれるわけであるが，これに対して

補題1.1.　Aに対するACPが適切ならば，すべての一般化された解は$(0, \infty)$で連続である．

補題1.1は任意の$\varepsilon > 0$に対して

$$\|T(t)\| \leqq M_\varepsilon, \quad \varepsilon \leqq t \leqq 1/\varepsilon,$$

が示されることから判る．これで$T(t)$の$t > 0$での強連続性が出たわけで，

定理1.2.　Aに対するACPが適切ならば，その解は次の様に表わされる：

$$u(t) = T(t)u_0, \quad u_0 \in D(A),$$

但し，$\{T(t); t > 0\}$は有界線形作用素の作る強連続な半群である．

注意1.3.　$u_0 \in D(A)$ならば　$T(t)u_0 = u(t) \to u_0 \ (t \to +0)$であるから，$\{T(t)\}$の continuity set $\Sigma = \{u \in X ; \|T(t)u - u\| \to 0 \ (t \to +0)\}$は$D(A)$を含んでいる．従って$D(A)$が$X$で稠密であれば，$\Sigma$も$X$で稠密である．このことに注意すると，Aに対す

るACPが適切である場合には　条件(A1)から $Y=\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ がXで稠密になっていることが導かれることは容易に判る．また条件(A3)があるとYがAの芯であることも同様にして示すことができる．

$\rho(A)\neq\phi$ の場合には，$AT(t)u_0 = T(t)Au_0$，$u_0\in D(A)$，$t>0$，を容易に示すことができるが，$\rho(A)=\phi$ の場合にはもう少し準備が必要なようである．

定理1.2により　$\{T(t)\}$ は半群をなすから，その type

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\log\|T(t)\| = \omega_0 < \infty$$

が確定する．ACPの"解作用素"が半群に拡張されるような条件を置くことの一つの利点として次のことが判る．

補題1.4.　　Aに対するACPは適切であるとする．ω_0 を $\{T(t)\}$ の typeとすれば，$\mathrm{Re}\,\lambda>\omega_0$ なる複素数 λ に対して $\lambda-A$ は可逆であり，$\lambda-A$ の値域 $R(\lambda-A)$ は $D(A)$ を含んでいる：

(1)　　$$D(A)\subset R(\lambda-A),\quad \mathrm{Re}\,\lambda>\omega_0.$$

(この包含関係を導くときに条件(A2)が用いられる。)　更に

(2)　　$$(\lambda-A)^{-1}u=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)u\,dt,\quad u\in D(A).$$

(2)から $AT(t)u_0 = T(t)Au_0$, $u_0 \in D(A^2)$, であることが判るから、条件(A3)を用いれば

(3) $(d/dt)T(t)u_0 = AT(t)u_0 = T(t)Au_0$, $u_0 \in D(A)$, $t > 0$,

が得られる. (3)はACPの定義における条件(ACP1)を実際に表わしている. 尚 (3)から出発すれば(即ち条件(A3)を用いれば), (2)は $u \in R(\lambda - A)$ に対して成立することが示される.

2. КРЕЙНの結果への補足

(1)に注意すれば, $R(\lambda - A)$ 上で $(\lambda - A)^{-(n+1)}$ が定義されることが判るが, $\rho(A) \neq \phi$ のときと同様に

補題 2.1. Aに対するACPが適切ならば,

$$(\lambda - A)^{-(n+1)} v = \frac{1}{n!}\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} T(t) v \, dt, \quad v \in R(\lambda - A).$$

但し, $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega_0$ かつ $n = 1, 2, \cdots$.

証明には, n に関する帰納法が便利なようである.

補題 2.2. Aに対するACPが適切ならば,

$$\|T(t)u\| \leqq Me^{\omega_1 t}(\|u\| + \|Au\|), \quad u \in D(A), \quad t > 0,$$

となるような定数 $\omega_1 \geqq \omega_0$ 及び $M > 0$ が存在する.

補題2.2の証明には，Aが閉線形作用素であるから，D(A)がgraph norm $\|u\|_A = \|u\| + \|Au\|$ に関してBanach空間[D(A)]になることに注意して共鳴定理を用いればよい.

補題1.4，2.1－2.2から次の定理が得られる：

定理2.3.　Aに対するACPが適切ならば，

I)　$\mathrm{Re}\,\lambda > \omega_0$ なる λ に対して　$\lambda - A$ は可逆であり，かつ

$$D(A) \subset R(\lambda - A), \qquad \mathrm{Re}\,\lambda > \omega_0 .$$

II)　$u \in D(A)$ 及び $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega_1$ なる λ に対して

$$\|(\lambda - A)^{-n} u\| \leqq M(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega_1)^{-n} \|u\|_A, \quad n = 1, 2, \cdots .$$

但し，ω_1 とMは補題2.2における定数である.

更に　もう一つ

定理2.4.　Aに対するACPが適切ならば

III)　任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $u \in D(A)$ に対して

$$\|\xi^n (\xi - A)^{-n} u\| \leqq M_\varepsilon \|u\|, \quad \varepsilon \leqq n/\xi \leqq 1/\varepsilon, \quad \xi > \xi_0,$$
$$n：\text{十分大}$$

となるような正数 $\xi_0 = \xi_0(\varepsilon, u)$ と M_ε が存在する.

以上のことから次の定理の必要性の方が判る：

定理 2.5.　Banach空間 X 内の線形作用素 A は次の三条件を満足しているものとする：

(A 1)　$D(A)$ は X で稠密である.

(A 2)　A は閉作用素である.

(A 3)　$D(A^2)$ は A の芯である.

このとき A に対する ACP が適切であるための必要十分条件は

I)　$\xi > \omega$ なる実数 ξ に対して $\xi - A$ は可逆かつ

$$D(A) \subset R(\xi - A), \quad \xi > \omega,$$

であるような実数 ω が存在する.

II)　$u \in D(A)$ に対して

$$\|(\xi - A)^{-n} u\| \leqq M(\xi - \omega_1)^{-n} \|u\|_A, \quad \xi > \omega_1, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

となるような実数 $\omega_1 \geqq \omega$ と正数 M が存在する.

の二つに定理 2.4 の条件 III) を加えた三つである.

実際, 定理 2.3 から　A に対する ACP が適切ならば, $\omega = \omega_0$ として定理 2.5 の条件 I) − II) が満たされていることが判る.

定理 2.5 の三条件が十分であることの証明は2段階に分けて行なうことにする. 即ちまず ACP の解作用素なる $D(A)$ 上で定義される1径数族 $\{U(t); t \geqq 0\}$ を構成し, 次にそれを全

空間X上の有界線形作用素からなる半群$\{T(t); t>0\}$に拡張するという段取りである．

3．ACPの解作用素の構成

簡単のため定理2.5で$\omega_1=0$（従って$\omega\leqq 0$）の場合について考える．

閉作用素Aに対する条件のうちで本節で用いるのは次の三つである：

(B1)　$\xi>0$に対して$\xi-A$は可逆かつ$D(A)\subset R(\xi-A)$．

(B2)　$u\in D(A)$に対して

$$\|\xi^n(\xi-A)^{-n}u\|\leqq M\|u\|_A,\quad \xi>0,\quad n=1,2,\cdots,$$

であるような定数$M>0$が存在する（安定条件）．

(B3)　$D(A^2)$はAの芯である．

(B1)と(B2)からKREĬN-LAPTEV-CVETKOVA[4]と同様にしてより強い安定条件を導くことができる：

補題3.1.　Aは条件(B1), (B2)を満足する閉線形作用素とする．そのとき

(B2′)　$u\in D(A)$に対して

$$\|\xi^n(\xi-A)^{-n}\eta^m(\eta-A)^{-m}u\| \leqq M\|u\|_A, \quad \xi,\ \eta > 0,$$
$$n,\ m = 0, 1, 2, \cdots.$$

さて本題にはいって

定理3.2. Banach空間X内の閉線形作用素Aに対して条件(B1)-(B3)を仮定する．そのとき

(4) $$U(t)u = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}A\right)^{-n}u, \quad u \in D(A),\ t \geqq 0,$$

によって1径数族$\{U(t);t\geqq 0\}$ − ACPの解作用素 − が一意的に定まる．但し，(4)の収束は任意の有限区間上で一様である．$U(t)$は次に挙げるような性質をもっている：

(a) $t \geqq 0$で$U(t)u$はtに関して連続である．また

$$\|U(t)u\| \leqq M\|u\|_A, \quad u \in D(A), \quad t \geqq 0.$$

特に，$\|U(t)u - u\| \to 0\ (t \to +0)$.

(b) $A^pU(t)u = U(t)A^pu, \quad u \in D(A^{p+1}), \quad t \geqq 0.$

但し，$p = 1, 2, \cdots$. 更に

$$(\xi-A)^{-1}U(t)v = U(t)(\xi-A)^{-1}v, \quad v \in D(A), \quad \xi > 0.$$

(c) $U(t)u - u = \int_0^t U(s)Au\,ds, \quad u \in D(A^2), \quad t \geqq 0.$

(d) $U(t+s)u = U(t)U(s)u, \quad u \in D(A^2), \quad t, s \geqq 0.$

(e) $(\xi-A)^{-1}v = \int_0^\infty e^{-\xi t}U(t)v\,dt, \quad v \in D(A), \quad \xi > 0.$

(4)の収束を $u \in D(A)$ に対して直接に示すことはできていない(できないかも知れない)。 $u \in D(A^2)$ に対しては CRANDALL-LIGGETT[1]の方法に従へば,条件(B2')により次の評価式が得られる:

$$\|(1-\tfrac{t}{n}A)^{-n}u-(1-\tfrac{t}{m}A)^{-m}u\| \leqq 2tM\left(\tfrac{1}{m}-\tfrac{1}{n}\right)^{1/2}\|Au\|_A,$$

$$u \in D(A^2), \quad t \geqq 0, \quad n \geqq m: \text{正整数}.$$

従って

$$\|U(t)u-(1-\tfrac{t}{m}A)^{-m}u\| \leqq 2tM\|Au\|_A/\sqrt{m}.$$

resolvent集合が空でないという仮定を捨ててみると確かに不便なことが多いが,上にみた(4)の収束の証明をはじめ,残りの部分もHILLE-YOSIDAの定理の証明と本質的な差はないように思われる。

Aに対するACPについては定理3.2の(a),(b),(c)から

系3.3. 任意の $u_0 \in D(A^2)$ に対して, $u(t)=U(t)u_0$ はAに対するACPの一意解を与える。この $u(t)$ は $t=0$ までこめて可微分であるが,ACPの適切性の定義における意味での初期値への連続的依存性はない。

尚　$\rho(A) \neq \phi$ ならば，ＡＣＰの解作用素はLIONSにより導入され，最近CHAZARAIN, USHIJIMAによりその生成作用素の特徴付けが行なわれた超関数半群と関連をもつが，$\rho(A) = \phi$ のときには超関数半群的な議論との対応がつけられるのかどうかまだはっきりしていないようである．但し，FRÉCHET空間 $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ を導入すれば，ＡＣＰの解作用素の Y 上への制限が Y 上の同等連続な (C_0) 級半群（YOSIDA[6]参照）となることは容易に判る．

HILLE-YOSIDAの定理の　上の定理3.2，系3.3のような形への拡張を最初に行なったのはSOVA[5]だと思われるが，[5]はあまり知られていないようである．SOVA[5]が扱ったのは $\rho(A) \neq \phi$ の場合であるが，ＡＣＰの解作用素と超関数半群との関係や解作用素を半群に拡張する問題については全く触れていない(cf. [7]).

4．解作用素の半群への拡張

本節でも定理2.5で $\omega_1 = 0$ の場合について考える．Aに対する条件のうちで前節では除外した　条件(A 1)と定理2.4の条件III)を用いると

定理4.1.　定理2.5の諸条件が満足されると　以下に挙げるような性質をもった半群$\{T(t); t>0\}$が一意的に定まる.

(a)　$T(t)u = U(t)u$, $u \in D(A)$, $t > 0$, 但し, $\{U(t)\}$はACPの解作用素である.

(b)　$\|T(t)u - u\| \to 0$ for $u \in D(A)$ as $t \to +0$. そして

(5)　$$\|T(t)\| \leqq M_\varepsilon, \quad \varepsilon \leqq t \leqq 1/\varepsilon.$$

(c)　$AT(t)u = T(t)Au$, $u \in D(A)$, $t > 0$.

(d)　$$T(t)u - T(t_0)u = \int_{t_0}^{t} T(s)Au\, ds, \quad u \in D(A),\ t \geqq t_0 > 0.$$

(e)　$$(\xi - A)^{-1}u = \int_0^\infty e^{-\xi t} T(t)u\, dt, \quad u \in D(A),\ \xi > 0.$$

定理4.1の(b), (c), (d)から　系3.3に対応する結果として

系4.2.　任意の$u_0 \in D(A)$に対して　$u(t) = T(t)u_0$はACPの一意解を与える.

定理4.1と系4.2によって　定理2.5の十分性の方が証明されたことになる. 実際, (5)は解$u(t) = T(t)u_0$の初期値u_0への連続的依存性を示す評価に他ならない.

以上で不十分ながら, КРЕЙН[3]の提起した問題への一つの解答を与える試みは終了です.

付　録

本文の定理2.5において条件(A3)の代りに

(A3') $\rho(A) \neq \phi$

を仮定しても　必要十分条件の個数が三つということに変わりはない．しかし次に述べる場合のように定理2.4の条件III)がかくれてしまうこともある．

定理A.　Banach空間X内の線形作用素Aは次の三条件を満足しているものとする：

(A1)　$\overline{D(A)} = X$；(A2)　Aは閉作用素；(A3')　$\rho(A) \neq \phi$.

このとき　$|\theta| \leqq \theta_0 - \varepsilon$,　$0 < \theta_0 \leqq \pi/2$, なるすべてのθに対して　$e^{i\theta}A$に対するACPが適切であるための必要十分条件は

(HI)　$|\arg(\zeta - \beta)| < \pi/2 + \theta_0$ なる複素数ζに対して，$\zeta - A$は可逆かつ　$D(A) \subset R(\zeta - A)$, であるような実数$\beta$が存在する．

(HII)　$u \in D(A)$とするとき，任意の$\varepsilon > 0$に対して

$$\|(\zeta - A)^{-1}u\| \leqq M_\varepsilon |\zeta - \beta|^{-1} \|u\|_A, \quad |\arg(\zeta - \beta)| \leqq \pi/2 + \theta_0 - \varepsilon,$$

となるような正数M_εが存在する．

の二つである．この場合　解作用素$\{U(t) ; t > 0\}$＝半群であり，$U(t)$は$|\arg t| < \theta_0$でtに関して解析的である．

尚　定理 3.2 に対応する"解析的"解作用素は Banach 空間 [D(A)] 上の解析的半群になる.

引用　文献

[1] CRANDALL - LIGGETT, to appear in Amer. J. Math.

[2] HILLE - PHILLIPS, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 31, revised ed., Providence, 1957.

[3] С. Г. КРЕЙН, Наука, Москва, 1967.

[4] KREĬN - LAPTEV - CVETKOVA, Soviet Math. Dokl., 11 (1970), 763 - 766.

[5] M. SOVA, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 22 (1968), 67 - 100.

[6] K. YOSIDA, second ed., Springer - Kinokuniya, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo, 1968.

[7] 大春慎之助, 数理科学 (数理解析研究所) 講究録 69, (1969), 17 - 33.